

Materialien zur Vorbereitung auf das
1. Staatsexamen Informatik (Algorithmen und
Datenstrukturen) in Bayern

FSI Lehramt Informatik (Erlangen)

20. August 2024

Lizenz

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License lizenziert. Es kann wie folgt referenziert werden:

Materialien zur Vorbereitung auf das 1. Staatsexamen Informatik (Algorithmen und Datenstrukturen) in Bayern © 2024 by FSI Lehramt Informatik (Erlangen) is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>.

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	3
1.1	Aufbau und Motivation	3
1.2	Mitmachen	3
2	Themenbereiche	4
2.1	Landau-Notation	4
3	Lösungsversuche	7

1 Vorwort

1.1 Aufbau und Motivation

Ziel dieses Dokuments und des zugehörigen Repositorys ist es, eine studentische Sammlung an Lösungsvorschlägen zu den Aufgaben vergangener 1. Staatsexamen im Fach Informatik in Bayern zu erstellen. Wir wollen dadurch kooperative und nachhaltige Vorbereitung fördern. Da wir leider kein Urheberrecht an den Aufgabenstellungen haben, können wir diese jedoch nicht veröffentlichen. Wir bitten um Verständnis.

Als Ausgleich dafür soll diese Sammlung auch einen Überblick über die Themenbereiche der Informatik geben, die in den Staatsexamen abgefragt werden. Dabei soll idealerweise eine Sammlung an Definitionen, Algorithmen, Sätzen und Ähnlichem entstehen, die potenziell mit eigens erstellten Beispielen ergänzt werden.

1.2 Mitmachen

von Max Mustermann

E-Mail: `max@mustermann.de`

Wir freuen uns selbstverständlich über jede Art von Beitrag. Sei es das Hinzufügen von Lösungen, das Korrigieren von Fehlern oder das Ergänzen von Inhalten in den Themenbereichen. Ausführliche Informationen zum Mitwirken lassen sich auf Github finden.

Wir möchten auch die Möglichkeit geben, eigene Lösungsvorschläge für Aufgaben mit den eigenen Autor-Informationen zu versehen. Dies sieht man beispielsweise an diesem Unterkapitel. Dies ist aber komplett optional!

2 Themenbereiche

2.1 Landau-Notation

Definition 2.1.1. Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion. Dann ist $O(g)$ wie folgt definiert:

$$O(g) := \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \begin{array}{l} \exists n_0 \in \mathbb{N}. \\ \exists c_2 > 0 \in \mathbb{R}. \\ \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}. \\ f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

Definition 2.1.2. Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion. Dann ist $\Omega(g)$ wie folgt definiert:

$$\Omega(g) := \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \begin{array}{l} \exists n_0 \in \mathbb{N}. \\ \exists c_1 > 0 \in \mathbb{R}. \\ \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}. \\ c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

Definition 2.1.3. Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion. Dann ist $\Theta(g)$ wie folgt definiert:

$$\Theta(g) := \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \begin{array}{l} \exists n_0 \in \mathbb{N}. \\ \exists c_1 > 0 \in \mathbb{R}. \\ \exists c_2 > 0 \in \mathbb{R}. \\ \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}. \\ c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

Beispiel 2.1.4.

$$\begin{aligned} O(3^{\log_2 n}) &= O(3^{\log_3 n}) \\ &= O(n) \\ &\subseteq O(n^2 - \log_2 n^{10}) \\ &= O(n^2 - 10 \cdot \log_2 n) \\ &= O(n^2) \\ &= O(3n^2 + \sqrt{4n}) \\ &\subseteq O(2^{n/2}) \\ &\subseteq O(3^{n-1}) \end{aligned}$$

Lemma 2.1.5. Für alle Funktionen $f, g, h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gilt, wenn $f \in \Theta(h)$ und $g \in O(h)$, dann auch $f + g \in \Theta(h)$.

Beweis. Seien $f, g, h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ Funktionen, sodass gilt:

$$f \in \Theta(h) \quad (2.4)$$

$$g \in O(h) \quad (2.5)$$

Zu zeigen ist:

$$f + g \in \Theta(h) \quad (2.6)$$

Aus (2.4) folgt, dass n_{f0}, c_{f1}, c_{f2} existieren, sodass für alle $n \geq n_{f0}$ folgende Gleichung gilt:

$$c_{f1} \cdot h(n) \leq f(n) \leq c_{f2} \cdot h(n) \quad (2.7)$$

Aus (2.5) folgt, dass n_{g0}, c_{g2} existieren, sodass für alle $n \geq n_{g0}$ folgende Gleichung gilt:

$$g(n) \leq c_{g2} \cdot h(n) \quad (2.8)$$

Gleichung (2.6) bedeutet, dass n_0, c_1, c_2 existieren, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass

$$c_1 \cdot h(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 \cdot h(n) \quad (2.9)$$

Wähle nun $n_0 = \max\{n_{f0}, n_{g0}\}$, $c_1 = c_{f1}$ und $c_2 = c_{f2} + c_{g2}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{h}(\mathbf{n}) &= c_{f1} \cdot h(n) \\ &\leq f(n) \\ &\leq \mathbf{f}(\mathbf{n}) + \mathbf{g}(\mathbf{n}) \\ &\leq c_{f2} \cdot h(n) + c_{g2} \cdot h(n) \\ &= (c_{f2} + c_{g2}) \cdot h(n) \\ &= \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{h}(\mathbf{n}) \end{aligned}$$

Dies war noch zu zeigen. □

Lemma 2.1.6. *Es gibt Funktionen $f, g, h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, sodass*

$$f \in \Theta(h) \quad (2.10)$$

$$g \in \Omega(h) \quad (2.11)$$

$$f + g \notin \Theta(h) \quad (2.12)$$

Beweis. Wähle $f(n) := 1$, $g(n) := 2^n$ und $h(n) := 1$.

Dann folgt (2.10) direkt, da $f = g$. (2.11) folgt, weil für alle $n \geq 1$ gilt, dass $h(n) \leq g(n)$.

Jedoch hat $f + g$ nicht durchschnittlich konstante Laufzeit. (2.12) lässt sich zeigen, da für jedes $n_0, c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ (gemäß obiger Definition) ein $n \geq n_0$ existiert, sodass $f(n) + g(n) > c_2$, nämlich $n = 2^{c_2+1}$. □

Theorem 2.1.7 (Master-Theorem). *Sei folgende Rekursionsgleichung gegeben:*

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) \quad (2.13)$$

Dann gelten folgende Implikationen:

$$\frac{\exists \epsilon > 0. f \in O(n^{\log_b a - \epsilon})}{T \in \Theta(n^{\log_b a})}$$

$$\frac{f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})}{T \in \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)}$$

$$\frac{\exists \epsilon > 0. f \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) \quad \exists 0 < c < 1. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n \geq n_0. a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)}{T \in \Theta(f)}$$

Beispiel 2.1.8. Es ist folgende Gleichung gegeben:

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{5}\right) + \frac{n}{2}$$

Definiere

$$\begin{aligned} a &:= 3 \\ b &:= 5 \\ f(n) &:= \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Es gilt

$$f \in \Omega(n^{\log_5 3+2})$$

sowie

$$\begin{aligned} 3 \cdot f\left(\frac{n}{5}\right) &= \frac{3n}{10} \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{n}{2} \\ &\leq \frac{3}{5} \cdot \frac{n}{2} \\ &\leq \frac{3}{5} \cdot f(n) \end{aligned}$$

Damit folgt nun nach Master-Theorem, dass $T \in \Theta(f)$.

3 Lösungsversuche